УДК 735.29

ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ АНАЛИЗА В РАБОТАХ НЬЮТОНА

Симчитмаа Ч. А. Скуратов С. В.
Профессор кафедры высшей математики Осипова С.И
Сибирский федеральный университет

При изучении курса математики преподаватель нам указывал, что фундаментальные понятия математики были предложены в 17 веке. Изучение работы А. Н. Колмогорова «Ньютон и современное математическое мышление» позволило нам убедиться в этом и сравнить исследования ученых с современным взглядом на базовые понятия математического анализа. В частности, считается, что основные математические работы Ньютона были написаны в следующие годы: 1) «Анализ с помощью уравнений с бесконечным числом членов» - в 1665 г.; 2) «Метод флюкций» - позднее «Анализа с помощью уравнений», но до 1671 г.; 3) «Рассуждение о квадратуре кривых» - основной текст в 1665 – 1666 гг.; окончательная редакция, введение и заключительное «Поучение» - значительно позднее, по – видимому, в семидесятых годах после «Метода флюксий». Как известно, возникновение современного дифференциального и интегрального исчислений было в значительной мере подготовлено работами математиков первой половины 17 в.: Кеплера, Кавальери, Декарта, Ферма и др. Однако, открытие этого исчисления приписывают Ньютону и Лейбницу, так как они первые свели решение всех разнообразных задач, при рассмотрении которых их предшественники пользовались методами анализа бесконечно малых, к систематическому применению двух обратных друг к другу операций: дифференцирования и интегрирования. Ученые, изучающие историю математики, отмечают, что Лейбниц опубликовал работы в 1682 – 1686 гг., в то время как в отношении времени фактического получения основных результатов есть все основания считать приоритет принадлежащим Ньютону, который основные идеи дифференциального и интегрального исчислений открыл в течение 1665 и 1666 гг., а к 1671 г. обладал уже законченной системой изложения своей теории, зафиксированной в «Методе флюксий», в то время как Лейбниц начал свои исследования по анализу бесконечно малых лишь 1673 г. Ньютон и Лейбниц подошли к созданию дифференциального и интегрального исчислений с совершенно различных сторон и с совершенно противоположными методологическими установками. Ньютоново представление о пределе изложено им в первом отделе первой книги «Начал». Ввиду дальнейших применений здесь больше всего говорится о пределах отношений исчезающих (т. е. стремящихся к нулю) или неограниченно возрастающих количеств. Первое впечатление от высказываний Ньютона вполне подтверждает мнение А. Н. Крылова, считающего, что мы имеем здесь вполне современную строгую теорию пределов. Анализ «Поучения» учеными позволяет установить некоторое, как нам представляется, нарушение логики в изложении теории пределов. В частности изложение начинается не с определения понятия предела, а с леммы. Лемма: «Количества, а также отношение количеств, которые в продолжение любого конечного времени постоянно стремятся к равенству и раннее конца этого времени приблизятся к друг другу, ближе нежели на любую заданную разность, будут в пределе равны». Так как лемме дается доказательство, то понятие предела, очевидно, считается уже данным заранее. Напрасно, однако, вообще было бы искать у Ньютона определения этого понятия: он вовсе и не считает нужным такое определение давать, считая понятие предела одним из основных исходных понятий, которые подлежат не определению, а только пояснению на примерах. Это особенно ясно из аргументации Ньютона (данной тоже в «Поучении» к рассматриваемому разделу «Начал»). Понятие предела (как и понятие скорости) является для Ньютона одним из исходных понятий, не подлежащих в силу их примитивного характера и интуитивной ясности прямому определению. Однако во всех своих утверждениях о свойствах пределов и способах их нахождения Ньютон вполне точен и ни в чем не расходится с нашими современными представлениями. Понятие скорости ему представлялось столь ясным, что никакой потребности в определении скорости как предела отношения приращения изменяющейся величины к приращению времени $\Delta t \to 0$ он не чувствовал. В соответствии с этим соотношение

$$x' = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

является для Ньютона не определением флюэнты x, а лишь формулой, позволяющей находить аналитическое выражение флюкции по аналитическому выражению флюэнты. Ньютоновская «флюэнта», говоря современным языком, это есть непрерывная функция f (x) имеющая своей областью определения интервал (a, b), со включением его начальной точки a и в случае существования предела $\lim_{x \to a} f\,(x)$ включением конечной точки b в случае существования предела $\lim_{x \to b} f\,(x)$. Мысль Ньютона приближалась к современному понятию дифференциала. Остановимся на этом поподробнее. В настоящее время, считая переменные x, y, z, … функциями основного независимого переменного t, мы определяем дифференциалы dx, dy, dz, … как главные части Δx, Δy, Δz, …, т. е. как функции двух переменных t и Δt, линейные по Δt и обладающие тем свойством, что разности Δx – dx, Δy – dy, Δz – dz … бесконечно малы по сравнению с Δt. В силу этого определения получим

$$dx = x'\Delta t,\ dy = y'\Delta t,\ dz = z'\Delta t,$$

где x', y', z' – производные.

В «Методе флюкций» флюкции всегда мыслятся как производные по некоторому вспомогательному переменному t, которое нигде явным образом в выкладки не входит. Что касается производных

$$\frac{dy}{dx},\ \frac{dz}{dx},\ \frac{dx}{dy},\ \ldots$$

какого – либо одного из явно входящих в задачу переменных по другому, то в «Методе флюксий» они всегда выражаются в виде отношений флюксий:

$$\frac{y'}{x'},\quad \frac{z'}{x'},\quad \frac{x'}{y'},\ \ldots.$$

Поэтому флюксии в выкладках здесь играют скорее роль наших дифференциалов, чем производных. Аппелируя к понятию скорости, Ньютон не сумел обойтись при обосновании анализа без понятий кинематики; но сейчас мы увидели, что ему была близка идея о том, что по существу чистый анализ от рассмотрений, связанных с введением времени (мы бы сказали: в реальном смысле этого слова – Ньютон говорит: «в его формальном значении», - различие чисто терминологическое), не зависит. Излишне добавлять, что и до настоящего времени прогрессивной научной методологией является та, которая ясно видит происхождение абстрактных понятий из обобщения конкретного опыта, но умеет и выделять их в полной чистоте, отбрасывая все для них несущественное.